



1751

De motu oscillatorio corporum flexibilium

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu oscillatorio corporum flexibilium" (1751). *Euler Archive - All Works*. 159.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/159>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
MOTV OSCILLATORIO CORPO-
RVM FLEXIBILIVM.

AVCTORE
LEONH. EVLERO.

§. 1.

Doctrina de oscillationibus corporum tanto studio a longo iam tempore est peruestigata, vt ea omnino exhausta esse videatur. Postquam enim Hugenus caepisset motum oscillatorium corporum rigidorum ex axe fixo suspensorum ad calculum reuocare: plurima alia oscillationum genera a Mathematicis sunt tractata ac determinata tam pro corporibus rigidis, quam flexibilibus atque etiam fluidis: neque solum in vacuo, sed etiam in medio resistente hos motus oscillatorios sunt perscrutati. Dedi quoque in Comment. Acad. Imper. Petrolitanae Tom. VIII. disertationem de hoc eodem argumento latissime patentem, in qua methodi perquam facilis et expeditae ope innumerabilia oscillationum genera, cuiusmodi sunt chordarum vibrantium, laminarum elasticarum altero termino fixarum, funium seu catenarum suspensarum etc. definiui, ac pro quouis casu longitudinem penduli simplicis isochroni assignaui. Quamuis autem haec doctrina penitus absoluta videatur, occurrunt tamen nonnumquam eiusmodi oscilationum casus, qui peculiari explicatione indigent; hocque adeo euenit in iis generibus, quae prae ceteris amplissime euoluta videntur.

§. 2.

§. 2. Huiusmodi scilicet quaestionem mihi proposuit Vir Celerer. Dan. Bernoullius „ circa corpora rigida de puncto fixo ope fili. suspensa, qui casus primo intuitu ille ipse esse videtur, quem Hugenus in ipso initio expedivit; filum enim in hac quaestione subtilissimum ponitur, ita vt perpetuo in lineam rectam maneat extensum. Hoc tamen non obstante ingens deprehendetur discrimen inter hunc et Hugeneii casum; qui vulgo per inuentionem centri oscillationis resolui solet. Namque in casu Hugeniano corpus non aliter mobile statuitur, nisi circa axem, ex quo est suspensum, saltem actu alium motum in corpore non existere ponitur praeter angularem circa axem suspensionis; atque in hoc negotio corpus cum filo, cuius ope suspenditur, tanquam rigidum omnisque flexionis incapax spectatur. Quamuis autem in casu Bernoulliano animum a flexibilitate fili abstrahamus seu eius loco virgam rigidam substituamus; tamen iste motus more consueto definiri nequit, nisi simul iunctura, qua corpus cum filo seu virga connectitur, omnis mobilitatis sit expers. Quod si autem corpus circa hanc iuncturam motum recipere queat: tum durantibus oscillationibus corpus non solum circa axem fixum feretur motu angulari, sed etiam circa iuncturam aliquantum vacillabit; hocque duplici motu fit, vt methodo vsitata per centri oscillationis investigationem verus motus oscillatorius determinari nequeat. Atque circa hunc casum versabatur quaestio, quam Celeb. Bernoullius mihi proposuerat.

§. 3. Ad hanc similesque alias quaestiones cum distincte intelligendas tum expedite resoluendas naturam motus oscillatorii ex ipsis principis altius repetemus. Ac primo

mo quidem in omni motu oscillatorio spectandus est status quietis seu aequilibri, in quo corpus, si semel fuerit constitutum, acquiescat: sunt enim oscillationes nil aliud nisi alternae accessiones ac recessiones a statu aequilibrii. Sic penduli ex puncto fixo suspensi status quietis est, quo recta per punctum istud fixum et centrum gravitatis corporis ducta situm tenet verticalem; dum autem oscillationes peragit, cis et ultra hunc statum alternatim excurrit, donec tandem in hoc statu quiescat. Sic quoque in chorda tensa datur status quietis, e quo si chorda deturbetur, vibrationes peragendo alternatim cis et ultra hunc situm digreditur. Ac simili modo in omni motu oscillatorio observantur eiusmodi reciprocationes, quibus corpora alternatim accedunt ac recedunt in eadem via semperque in huius viae medio existit status quietis, in quo corpus tandem, excursionibus penitus extinctis, quiescat. Oscillatio autem vocatur una huiusmodi motus reciproci periodus, qua corpus e statu quietis digressum iterum ad eum accedit, indeque ulterius recedit, donec denovo in eadem via reuerti incipiat: ex quo una quaeque oscillatio duabus constat partibus, quarum priori ad statum quietis accedit, posteriore ab eo recedit. Oscillatio ergo finitur cum corpus maxime a statu quietis recesserit: ibique incipit nova sequens oscillatio, quae pariter absoluetur accessione ad statum quietis, ac subsequente recessione ab eodem termino.

§. 4. Primum igitur natura status quietis, qui in omni motu oscillatorio inest diligentius perscrutari oportet, cum ex eo motus oscillatorius potissimum pendeat, ac determinetur. Duplici autem modo corpus in quiete
versa-

versari potest: primum scilicet si a nullis omnino potentiis sollicitetur tum enim vi primae motus legis in eodem statu perpetuo perseverabit: deinde vero corpus etiam si a potentiis sollicitetur, tamen in quiete persistere potest, si potentiae se mutuo destruant, atque in aequilibrio sint constitutae: atque hinc iste quietis status, ut a priori distinguatur, status aequilibrui vocari solet. Prior quietis status, quo corpus a nullis urgetur potentiis omnino ad motum oscillatorium producendum est ineptus; licet enim hoc corpus ex hoc statu remoueatur, tamen ob defectum virium id sollicitantium, non in pristinum statum reuertetur, sed in statu remoto pariter quiescet. Quod si autem potentiarum corpus sollicitantium, dum corpus ex statu quietis deturbatur, aequilibrium rumpitur, tum utique aderunt vires corpus in statum quietis repellentes; et quoniam ab his viribus corpori motus imprimitur, corpus cum quadam celeritate in statum aequilibrui appellet, proinde vterius excurret in plagam oppositam donec eius motus a viribus contra nitentibus absumatur, tum vero ob similem causam rursus ad statum aequilibrui urgetur, sicque motu reciproco accedendo et recedendo oscillationes peraget.

§. 5. Motus igitur oscillatorius existit, si vires cor-
pus sollicitantes ita fuerint comparatae, ut, cum cor-
pus extra statum quietis constituitur, eae corpus versus
hunc quietis statum propellant. Consideremus primum
corpus instar puncti sitque C eius locus quietis; in quo
potentiae id sollicitantes in aequilibrio sint constitutae. Con-
cipiatur iam corpus ex C in A transferri, et quia in
A non est status aequilibrui, corpus ex A in directione
A C

Tab. III.
fig. 1.

AC sollicitabitur atque si sibi relinquatur actu per spatium AC promouebitur; continuo autem in hoc motu accelerabitur, quia in singulis spatii AC punctis P p vis adest corpus versus C propellens, ideoque maxima cum celeritate in C appellet, qua, etsi in C est status quietis quoniam tamen ibi nullam virium actionem patitur, ultra in directione CB perget. Quamprimum autem ultra C pertingit, subibit actionem virium id retro versus C pellentium, quibus propterea eius motus iterum retardabitur, donec tandem in B omnis motus ab his viribus reluctantibus destruatur. Ex B igitur ab iisdem viribus reuerti cogetur in via BC, hocque in motu pariter usque in C accelerabitur, ita ut motu concepto iterum versus A excurrere debeat; donec omnem motum amiserit. Absoluet ergo corpus oscillationes tamdiu, quoad propter resistentiam aeris aliaque obstacula omnem motum amittat, atque in C quiescat.

§. 6. Ad motum ergo istiusmodi oscillationum determinandum nosse oportet vim; qua corpus in quavis a puncto C distantia positum eo vrgetur. Quae vis, si in se spectetur, utique quamcunque legem elongationis a puncto C sequi potest, hincque innumerabilia oscillationum genera orientur; interim tamen, quoniam ista vis evanescit, si corpus in ipso puncto C versatur, necesse est, ut haec vis eo maior euadat, quo longius corpus a puncto C remoueat: Sicque corpore in P existente quantitas vis, quae id versus C vrgebit, proportionalis erit functioni cuiuspiam distantiae CP, quae fit $= x$, quae evanescat posito $x = 0$. Si igitur haec functio, cui vis corpus in distantia $CP = x$ versus C sollicitans est proportio-

proportionalis ponatur, $= \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}$ manifestum est si elongationes a puncto C fuerint minimae, tum vires corpus in quavis distantia $CP = x$ versus C sollicitantes fore his ipsis distantis proportionales: vis igitur, quae corpus in A constitutum versus C pellit, est ad vim corpus in P existens versus C pellentem ut AC ad PC. Atque simili modo in altera parte CB, ubi x fit negativa, in quavis distantia CQ corpus in directione QC sollicitabitur vi ipsi distantiae CQ proportionali. Haec autem virium sollicitantium lex distantis a situ aequilibrii proportionalis, siquidem distantiae fuerint quam minimae, in omnibus oscillationum generibus, quae quidem in mundo observantur, locum habet, ita ut ea instar principii omnis motus oscillatorii uti possimus.

§. 7. Hoc principio stabilito sequitur omnes oscillationes eiusdem corporis, siue inter oscillandum maiora siue minora spatia percurrat, dummodo in se spectata sint minima, eodem tempore absolui debere seu fore isochronas. Sit enim initio corpus ex C in A usque deductum ex quo loco motum oscillatorium coeperit, peruenitque iam in P ac ponatur $AC = a$, $CP = x$, et celeritas, qua corpus elementum spatii $Pp = dx$ percurrit debita sit altitudini v . Sit iam g vis acceleratrix, qua corpus in data distantia c a situ C versus C sollicitatur, erit vis qua in P actu per Pp acceleratur $= \frac{g \cdot x}{c}$; unde fiet $d \cdot v = \frac{g \cdot x \cdot dx}{c}$, hincque $v = \frac{g}{2c} (aa - xx)$. Ipsa ergo celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{g}{2c} (aa - xx)}$; ideoque corpus in C adueniet celeritate $= a \sqrt{\frac{g}{2c}}$. Tempusculum vero, quo per spatium $Pp = -dx$ transibit

Tom. XIII.

R

erit

erit $= \frac{-dx}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-xx)}} : \text{ex quo tempus per spatium AP}$

erit $= \frac{A \cos \frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Tempus ergo totius accessus per spa-

tium AC erit $= \frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$: denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 8. Hac accessione autem semissis primae oscillationis absoluitur, quae adeo fit tempore $\frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$, in qua expressione cum non insit quantitas spatii percurfi AC $= a$, perspicuum est accessionem corporis ad C perpetuo aequali tempore absolui, siue maius siue minus spatium AC conficiat. Simili autem modo intelligetur recessum per spatium CB, qui alteram oscillationis partem constituit, eodem tempore absolui, ita vt totum vnus oscillationis tempus futurum sit $= \frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$. Cum enim corpus in C veniat celeritate debita altitudini $\frac{g a a}{2 c}$, ponamus hoc motu iam peruenisse in Q, posito CQ $= y$, vbi celeritas eius, qua per elementum Qq $= dy$ pergit, debita fit altitudini u , in hoc ergo loco corpus retrahetur ac retardabitur vi $= \frac{g y}{c}$, vnde fit $du = -\frac{g y dy}{c}$ ergo $u = \frac{g}{2c} (aa - yy)$. Excurrent itaque antequam omnem motum amittat per spatium CB $= a$, ita vt sit CB $=$ AC. Tempus autem per spatium CQ $= y$ erit $= \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-yy)}} = \frac{A \sin \frac{y}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Fiat $y = a$, ac prodibit tempus recessionis integrae per spatium CB, $= \frac{\pi \sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$; quod vtique aequale est tempori accessionis per AC, ita

ita vt tempus totius oscillationis per ACB factae futurum sit $= \frac{\pi \sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$, huicque aequalia erunt tempora omnium sequentium oscillationum.

§. 9. Commodissime autem tempora huiusmodi oscillationum mensurari solent per pendula simplicia eodem tempore oscillationes suas absoluentia. Cum enim pendulum simplex, cuius longitudo est 3, 166 pedum Rhen. singulis minutis secundis oscillationes peragat, atque tempora diuersorum pendulorum sequantur longitudinum rationem subduplicatam, manifestum est, si cognoscamus longitudinem penduli simplicis isochroni cum motu quopiam oscillatorio proposito, tum simul veram oscillationum durationem innotescere. Pendulum quidem simplex est res mære imaginaria, cum per id intelligatur corpus infinite paruum ope fili infinite tenuis et inertia destituti ex puncto fixo suspensum: attamen eiusmodi pendulum etsi imaginarium commode pro mensura quarumcunque oscillationum adhibetur, cum per id non solum ratio, quam diuersae oscillationes inter se tenent, cognoscatur, sed etiam duratio oscillationum per cognitae temporis particulas, veluti minuta secunda assignari queat. Atque huc quoque referenda est centri oscillationis inuestigatio, aequatur enim semper distantia centri oscillationis ab axe suspensionis longitudini penduli simplicis isochroni.

§. 10. Vt igitur motum oscillatorium quemcumque cum pendulo simplici comparare queamus, contem-
 mur pendulum simplex OC, quod constet ex corpuscu-
 lo infinite paruo C cuius pondus sit $= p$, ope fili OC
 cum inertiae tum grauitatis expertis ex polo fixo O suspensio:
 sit longitudo huius penduli $OC = f$; eritque hoc pendu-
 lum in statu quietis, si recta OC fuerit verticalis. Deducatur hoc

pendulum OC infinite parum in situm OA, in quo utique cessabit aequilibrium; cum enim pondusculum p in A positum sollicitetur deorsum in directione verticali AE, quae non amplius cum directione fili OA congruit, resoluitur vis AE, quae aequalis est ponderi corpusculi p , in laterales AN et AM, quarum illa AN in tensione fili consumitur, haec vero AM corpusculum in directione AMC ad spatium AC percurrendum sollicitabit. Erit vero ob triangula similia OAC et EAM, vis AM $= \frac{p \cdot AC}{OC}$, ita ut corpusculum in A sollicitetur secundum directionem AC vi $= \frac{p \cdot AC}{OC}$, quae utique distantiae corpusculi AC a situ quietis est proportionalis, quamobrem omnes oscillationes huius penduli aequalibus absolventur temporibus, dummodo spatiosa AC fuerint minima. Quoniam vero massa corpusculi est pariter $= p$, erit vis acceleratrix corpusculum in A sollicitans $= \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{f}$.

§. II. Vis igitur acceleratrix, qua corpusculum C ad quancunque distantiam AC a situ quietis C deductum versus C sollicitatur aequalis est ipsi distantiae AC diuisae per longitudinem penduli $OC = f$, seu haec vis acceleratrix est ad vim acceleratricem gravitatis naturalis uti spatium AC ad longitudinem penduli OC. Quod si igitur in praecedente casu, quo corpusculum ex C in A deductum ad motum oscillatorium impellitur vis acceleratrix in quavis distantia $CP = x$, fuerit aequalis vi acceleratrici, qua pendulum simplex in eadem distantia versus statum quietis vrgetur, tum oscillationes in utroque casu absolventur aequalibus temporibus, atque longitudo $OC = f$ dabit pendulum simplex isochronum cum motu oscillatorio fig. 1.. In fig. 1 autem est in distantia

tia $CP = x$ vis acceleratrix $= \frac{g}{c}x$; in pendulo autem pro eadem distantia est vis acceleratrix $= \frac{x}{f}$; ex quarum aequalitate sequitur $f = \frac{c}{g}$. Statim ergo pro quovis motu oscillatorio ex sola vi acceleratrice innotescit longitudo penduli simplicis isochroni, quae prodit, si spatium CP per vim acceleratricem, quam corpus in hac distantia sentit diuidatur, hic enim quotus vbique podit eiusdem quantitatis.

§. 12. Vicissim igitur si constet longitudo penduli simplicis isochroni, quae sit $= f$, pro motu quopiam oscillatorio, definire poterimus vim acceleratricem in quavis a statu quietis distantia. Si nimirum punctum C per spatium AB vti ante exposuimus, oscillationes absoluat paribus temporibus vti pendulum simplex longitudinis f ; necesse est, vt vis acceleratrix, qua corpusculum in quavis elongatione $CP = x$ a statu quietis C impellitur sit $= \frac{x}{f}$; siquidem, vti in sequentibus semper assumimus, oscillationes fiant per spatia quam minima. Quodsi autem longitudo penduli simplicis non fuerit cognita, tamen, si ea quasi cognita tractetur, quemadmodum in analysi quantitates incognitae, tanquam essent cognitae tractari solent, expressio pro vi acceleratrice in quavis a statu quietis distantia reperietur; quae proinde si comparatur cum vi, qua corpus actu sollicitatur, dabit aequationem, ex qua longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur. Posita nimirum pro motu oscillatorio corpusculi C per spatium AB, longitudine penduli simplicis isochroni etsi ad huc incognita $= f$, erit corpusculi in P positi vis acceleratrix $= \frac{PC}{f}$; at ex huius aequili-

brii natura nouimus vim acceleratricem, qua corpus in eadem distantia P C actu sollicitetur, esse $= \frac{g \cdot PC}{c}$, unde concludimus fore $\frac{PC}{f} = \frac{g \cdot PC}{c}$, hincque $f = \frac{c}{g}$, simili igitur ratiocinio in quouis casu longitudo penduli simplicis isochroni satis expedite determinari poterit.

§. 13. Plana quidem haec sunt, si corpus, quod oscillationes peragit, instar puncti considerari potest, at si corpus finitam habeat extensionem ratiocinium aliquanto magis fiet complicatum, interim tamen eodem modo expeditur. Primo enim probe notari debet situs, quem quaelibet corporis particula in statu aequilibrii occupat, deinde corpus extra statum aequilibrii infinite parum declinari concipiatur, vt obtineat situm ad oscillationes producendas idoneum. Tum igitur quaeratur distantia cuiusvis corporis particulae in hoc statu, a loco, quem in statu aequilibrii obtinet; quae distantia simul viam cuique particulae percurrendam praebebit, donec ad statum aequilibrii perueniat; quo motu prior vnius oscillationis semissis absoluitur. Cognita iam vniuscuiusque particulae distantia a suo situ quietis, et longitudine penduli simplicis isochroni tanquam cognita assumpta, innotescet vis acceleratrix vnamquamque particulam sollicitans, quae in massam particulae ducta dabit vim motricem. Hinc ergo colligetur vis motrix totalis corpus sollicitans, quae aequiualeere debet viribus corpus actu vrgentibus, atque ex hac aequiualentia elicietur longitudo penduli simplicis isochroni.

§. 14. Consideremus ergo corpus quodcumque AB CD rigidum, nullius mutationis in figura sua capax, quod vel per se solum oscillationes peragat, vel cum aliis corporibus coniunctum oscilletur; dum enim vires
inuesti-

inuestigamus ad hoc requisitas, vt oscillationes dato tempore absoluantur, quamuis corporis oscillantis parte in seorsum contemplari conuenit; et, si totum corpus oscillans inflexiones admittat, constabit partibus vel finitae magnitudinis vel infinite paruae quae nullam mutationem recipiunt. Sit igitur ABCD eiusmodi corpus vel pars corporis oscillantis omnis mutationis in figura sua expertae sitque situs, quem figura repraesentat, eius status aequilibrii, in quo vel quiescit, vel in quem peruenit in cuiuslibet oscillationis medio. Dum igitur hoc corpus oscillationes facit, alternatim de hoc situ aequilibrii vel versus P vel Q recedit, hicque duo occurrunt casus considerandi. Vel enim singulae corporis partes aequaliter a situ suo quietis recedunt, vel aliae magis aliae minus, quod posterius euenit, si corpus in motu oscillatorio circa axem quempiam fixum motu angulari fertur, tum enim corporis partes axi viciniores minus a loco quietis recedunt, quam eae, quae magis sunt remotae.

§. 15. Ponamus primum in motu oscillatorio omnes corporis partes aequaliter a suo aequilibrii situ digredi, ita vt corpus solo motu progressiuo feratur, quo singulae eius partes motu inter se parallelo, et aequalibus eodem tempore celeritatibus mouentur. Dum igitur corporis centrum grauitatis G per interuallum Gg in g transfertur, quaelibet corporis particula M per interuallum Mm ipsi Gg aequale et parallelum procedet. Quod si ergo longitudo penduli simplicis isochroni siue cognita sit, siue incognita, ponatur $= f$, vis acceleratrix qua particula M in m posita secundum directionem mM sollicitatur erit $= \frac{Mm}{f} = \frac{Gg}{f}$. Ponatur distantia Gg = ω , quam per-

perpetuo. quasi infinite parvam vel saltem minimam assumo, erit vis acceleratrix virgens particulam M in directione $mM = \frac{\omega}{f}$. Multiplicetur haec per massam seu pondus ipsius particulae M , quod sit $= p$, atque prodibit vis motrix particulam M sollicitans $= \frac{\omega p}{f}$, quae exprimatur linea Mp in huius vis directione lineolae Gg parallela. Sic igitur innotescunt vires singulas corporis particulas sollicitantes, cum centrum gravitatis corporis atque adeo singula elementa per spatia ω a suis locis, quae in statu aequilibrum tenent, recesserunt.

§. 16. Quoniam directiones singularum harum virium sollicitantium sunt inter se parallelae, vis ipsis omnibus aequivalens earum summae aequabitur, eritque ideo $= \int \frac{\omega p}{f} = \frac{\omega}{f} \int p$, ob ω et f quantitates in hac summatione constantes. At cum p sit massa vniuscuiusque corporis elementi, M denotabit $\int p$ massam seu pondus totius corporis. Quare si corporis massa seu pondus ponatur $= P$, erit vis motrix totalis ex singulis viribus sollicitantibus resultans $= \frac{\omega P}{f}$, huiusque directio parallela erit directionibus singularum virium, hoc est directioni gG . Ceterum cum iste calculus omnino similis sit ei, quo centrum gravitatis cuiusque corporis inuestigari solet, perspicuum est mediam directionem omnium istarum virium partialium transire per corporis centrum gravitatis G ; cum enim vires singulas corporis particulas sollicitantes sint ipsarum massis proportionales, ac directiones habeant inter se parallelas, necesse est, ut earum media directio per centrum gravitatis transeat. Quod si ergo per centrum gravitatis G ducatur recta $GP = \frac{\omega P}{f}$ in directione gG , haec recta exhibebit vim motricem totalem ad
hoc

hoc requisitam, vt corpus ABCD motu sibi parallelo oscillationes peragendo eodem tempore oscillationes absoluat, quo pendulum simplex longitudinis f .

§. 17. Quo citius huius inuestigationis vsus appareat Fig. 4. at, ponamus corpus A C B D inter duo elastra A E et B F tensa esse constitutum, ita vt in aequilibrio versetur, vbi vires elastrorum sunt inter se aequales; cum enim sibi directe sint contrariae, atque earum directiones per centrum grauitatis corporis G transeant, corpus vtique quiescet, vbi vires elastrorum inter se sunt aequales, quod in situ, quem figura praesentat, euenire ponamus. Sit A vis, quam vtrumque elastrum in corpus interiectum exerit: ac pendebit eius quantitas a magnitudine interualli A E et C F, ita vt diminuto interuallo vis A crescat, aucto vero interuallo decrescat. Moueatur iam corpus motu sibi parallelo versus F, ita vt eius centrum grauitatis G per spatiolum $Gg = \omega$ progrediatur: hocque motu vis elastri B F intendetur, alterius vero A E tantundem remittetur. Fiat in hoc statu vis elastri B F $= A + E \omega$, et elastri A E vis $= A - E \omega$: atque manifestum est vim, qua corpus versus statum aequilibrii vrgebitur fore $= 2 E \omega$: quae vis vtique corpori motum oscillatorium inducet. Ad hunc inueniendum sit longitudo penduli simplicis isochroni $= f$, et pondus corporis $= P$; hincque vis corpus, cum per interuallum $Gg = \omega$ de statu aequilibrii recesserit erit $= \frac{P \omega}{f}$: fiat haec vis aequalis ei, qua actu sollicitatur, $2 E \omega$, atque reperiatur longitudo penduli simplicis isochroni $f = \frac{P}{2 E}$. Assumimus autem elastra inertiae expertia, vt nulla vi opus sit ad ipsa elastra mouenda.

Tom. XIII.

§

§. 18.

Fig. 5.

§. 18. Inuestigamus iam vires ad motum oscillatorium dato tempore producendum requisitas, si corpus non motu sibi parallelo ex statu quietis recedat, ad eundemque accedat, sed interea circa axem quempiam fixum gyretur, ita ut spatia, quae singulae corporis particulae percurrunt, sint ipsarum distantiarum ab axe proportionalia. Sit igitur corpus $ABCD$ in statu aequilibrum, quod dum oscillationes peragit, circa axem fixum O , quem ad planum chartae normalem concipi oportet, motu angulari fertur. Planum chartae repraesentet sectionem ad axem O normalem per centrum gravitatis corporis G factam. Removeatur iam hoc corpus aliquantillum ex statu aequilibrum, ita ut eius centrum gravitatis G transferatur per arcum Gg centro O descriptum in g , atque quaelibet corporis particula M interea procedet per arcum Mm pariter centro O descriptum, ita ut sit angulus MOm aequalis angulo GOg seu $Mm : Gg = OM : OG$. Hoc idem non solum in hac corporis sectione per centrum gravitatis facta eveniet, sed in omni sectione corporis illi parallela seu ad axem O normali, ita ut de omnibus corporis particulis constet, per quanam spatia transferantur dum centrum gravitatis G per arcum Gg promouetur: atque sic distantia cuiusvis corporis particulae a situ, quem in statu aequilibrum tenebat, definiri poterit.

§. 19. Vocetur distantia $OG = a$, et spatium $Gg = a$, tum ex particula M in planum ad chartam normale ac per axem O et centrum gravitatis ductum ducatur perpendicularum ML , ponatur $OL = x$ et $LM = y$ erit $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et per analogiam

giam datam $M m = \frac{\omega v (xx + yy)}{a}$. Quodsi iam longitudo penduli simplicis isochroni sit $= f$, erit vis acceleratrix particulae M in m translatae per spatium mM $\frac{M m}{f} = \frac{\omega v (xx + yy)}{af}$, et denotante p massam elementi M erit vis motrix $= \frac{\omega p v (xx + yy)}{af}$ cuius directio erit Mp ad OM normalis. Resolvatur haec vis in laterales ML et MI , erit vis in directione ML vrgens $= \frac{\omega p x}{af}$, et vis in directione MN vrgens $= \frac{\omega p y}{af}$. Summa autem omnium harum posteriorum virium in directione MN est $= \frac{\omega}{af} \int y p$; at est $y p$ momentum pondusculi p ad axem OG relatum, qui axis cum per centrum gravitatis G transeat, erit ex natura centri gravitatis summa omnium horum momentorum nihilo aequalis; et hancobrem earum media directio prodiret infinita, ita vt positio vis omnibus aequivalentis determinari nequeat.

§. 20. Incommodum hoc tolletur, si omnes has vires MN in eandem directionem incidere faciamus. Cum enim perinde sit, in quonam directionis suae Mp puncto vim $\frac{\omega p v (xx + yy)}{af}$ applicatam concipiamus, concipiamus eam applicatam in puncto p , vbi haec directio plano ad chartam normali atque per O et G ducto occurrit, haecque resoluta dabit vim lateralem in directione pq vrgentem $= \frac{\omega p x}{af}$, et alteram vim lateralem in directione pC sollicitantem $= \frac{\omega p y}{af}$, quae posteriores adeo vires omnes sitae erunt in plano ad OC normali. Quarum summa cum sit aequalis nihilo eae nihil ad motum conferent, sed tantum conabuntur corpus circa axem BD inclinare, nisi earum momenta ad utramque axis huius partem se mutuo destruant. Siquidem totum cor-

pus in planum ABCD esset explanatum, tum momenta harum virium respectu axis BD nulla existerent, at si elementum M non in plano chartae sit situm sed ab eo remotum sit interuallo $= z$, tum momentum ad corpus circa axem BD conuertendum tendens foret $= \frac{\omega p y z}{a f}$; horum autem omnium momentorum summa plerumque est vehementer exigua, nam si vel sectio ABCD, vel sectio ad eam normalis per AC ducta corpus in duas partes similes diuidat, tum omnino haec momenta elementaria se mutuo destruunt.

§. 21. Cum igitur ob hanc causam effectum, qui ab his viribus in directione $p C$ agentibus vnquam oriri potest, negligere queamus, supersunt tantum vires $\frac{\omega p x}{a f}$ in directione $p q$ applicatae, quarum summa est $= \frac{\omega}{a f} \int p x$. At $p x$ est momentum particulae M respectu axis O, ideoque ex natura centri grauitatis summa omnium istorum momentorum aequatur ponderi totius corporis, quod fit $= P$ per distantiam centri grauitatis G ab axe O nempe $O G = a$ multiplicato, ita vt fit $\int p x = P a$. ideoque summa virium $\frac{\omega}{a f} \int p x = \frac{\omega P}{f}$, quae simul est vis aequiualens omnibus viribus $\frac{\omega p x}{a f}$. Quod autem ad earum mediam directionem attinet, quae utique parallela erit directionibus singularum $p q$, eius distantia ab axe O reperietur, si summa momentorum harum virium ad axem O relatorum, quae est $= \frac{\omega}{a f} \int p x$. O p , diuidatur per summam ipsarum virium, quam vidimus esse $= \frac{\omega P}{f}$. Capiatur ergo O S $= \frac{\int p x \cdot O p}{P a}$, erit OS distantia vis aequiualentis ab axe O,

at-

atque si in S applicetur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$, indirectione SP ipsi $p q$ parallela, haec vis aequualebit singulis viribus particulas corporis sollicitantibus simul sumtis.

§. 22. Cum igitur in cognitione distantiae OS cardo rei versetur, eam dilucide definiri conuenit; quoniam ergo OM est media proportionalis inter OL et Op fiet $x. Op = OM^2 = xx + yy$; ita vt futura sit distantia $OS = \frac{\int p. OM^2}{Pa} = \frac{\int p. (xx + yy)}{Pa}$. Singula igitur corporis elementa multiplicari debent per quadrata distantiarum suarum ab axe O , ac summa horum productorum diuisa per Pa dabit distantiam OS , haecque est regula nota pro centro oscillationis inueniundo. Vel si per G ductus concipiatur axis axi O parallelus, ad eumque ex M perpendicularis ducatur MG erit $OM^2 = MG^2 + OG^2 - 2 OG. GL$; ideoque $\int p. OM^2 = \int p. MG^2 + \int p. OG^2 - 2 \int p. OG. GL$; at est $\int p. OG^2 = Pa^2$, ob $\int p = P$, et $\int p. OG. GL = a \int p. GL$, quae summa ob G centrum grauitatis euanescit, superest ergo $\int p. MG^2$, quae designat summam omnium productorum ex singulis corporis particulis in quadrata distantiarum suarum ab axe per centrum grauitatis corporis G ducto atque axi O parallelo. Quodsi ergo haec summa quam momentum inertiae corporis respectu huius axis vocare soleo, ponatur $= P h h$ fiet $\int p. OM^2 = P h h + P a a$, ideoque distantia quaesita $OS = a + \frac{h h}{a}$.

§. 23. Haec linea OS tantum dat distantiam vis sollicitantis totalis $SP = \frac{\omega P}{f}$ ab axe O , neque etiamnum constat, vtrum ea in planum $OB D$ per centrum gra-

vitatis G normaliter ad axem O ductum cadat an non. Sit igitur ad hoc inuestigandum particulae M distantia ab hoc plano $= z$, eritque vis $p q = \frac{\omega p x}{a f}$ momentum ad hoc planum relatum $= \frac{\omega p x z}{a f}$; horum igitur momentorum omnium summa $\int \frac{\omega p x z}{a f}$ seu $\frac{\omega}{a f} \int p x z$ per summam virium $\frac{\omega P}{f}$ diuisa dabit distantiam puncti S a plano ODB vel sursum accipiendam vel deorsum, prout summa $\int p x z$ affirmatiuum vel negatiuum obtineat valorem. Sit $GL = a - x = t$, erit $\int p x z = \int a p z - \int p t z = - \int p t z$ ob $\int a p z = 0$, quia planum ODB per centrum grauitatis transit, eritque distantia puncti S ab hoc plano $= \frac{\int p t z}{a f}$. Recipiunt vero tam t quam z valores cum affirmatiuos tum negatiuos, ita vt haec expressio plerumque sit vehementer parua; omnino autem nulla erit si vel planum $ABCD$ vel planum ad hoc normale per BD ductum corpus in duas partes similes secet. Hancque ob rem in praesenti instituto istam puncti S a plano ODB distantiam, si quam habet, negligemus.

§. 24. Si igitur corpus $ABCD$ ita oscilletur, vt inter oscillandum circa axem fixum O moueatur, atque eius oscillationibus isochronum sit pendulum longitudinis f , vis motrix ad motum hunc oscillatorium producendum requisita sequenti modo determinabitur. Ponamus centrum grauitatis corporis G inter oscillandum peruenisse in g , ita vt eius distantia a loco quietis G sit $Gg = \omega$: fitque totius corporis massa seu pondus $= P$. Tum per centrum grauitatis G ductus concipiatur axis axi illi O parallelus, ac quaeratur corporis momentum inertiae respectu huius axis per centrum grauitatis ducti, quod sit $= P b b$; re-

pe-

periturque, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab hoc axe multiplicentur, atque omnia producta in vnā summam coniciantur. Quo facto ducatur per centrum grauitatis corporis G planum ad axem O normale, atque in recta OG sumatur $GS = \frac{b'b'}{OG} = \frac{b'b'}{a}$ ob $OG = a$; in puncto S applicata concipiatur vis $SP = \frac{wP}{f}$ in directione SP ad OS in plano OBD normali, eritque haec vis illa ipsa, quae requiritur ad motum hunc oscillatorium producendum. Ceterum patet, si axis O infinite distet, ita vt corpus motu sibi parallelo feratur, tum punctum S in centrum grauitatis G incidere ob $a = \infty$, prorsus vt ante inuenimus.

§. 25. Propositō igitur corpore quocunque rigido, quod a potentiis sollicitatum oscillationes peragat, eius motus oscillatorius sequenti modo determinabitur. Assumatur tanquam cognita longitudo penduli simplicis isochroni f , ac dispiciatur quonam modo corpus inter oscillandum a statu suo quietis digrediat, vtum motu sibi parallelo an motu angulari circa axem quempiam fixum. Tum secundum praecepta pro vtroque casu data quaeratur vis motrix ad hunc motum oscillatorium producendum requisita. Denique haec vis quia ob f incognitam est indeterminata aequiualens reddatur viribus corpus actu sollicitantibus, hincque nascetur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni f determinans. Ista autem aequiualentia obtinetur, si in locum vis motricis inuentae applicata concipiatur vis ipsi aequalis et contraria, tum enim haec vis cum viribus corpus actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debet. Quoties namque vna vis

aliis viribus aequiualeat, toties eius contraria cum his iisdem viribus aequilibrium constituet: ideoque ex natura aequilibrî deriuabitur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni f determinans.

§. 26. Ex his iam statim oscillationes corporum inflexibilium ex axe fixo suspenforum a grauitate oriundae definiri poterunt, qui est casus notissimus per inuentionem centri oscillationis expediri solitus. Sit igitur corpus ABCD ope virgae rigidae OAB ex axe fixo horizontali O ita suspensum, vt alium motum praeter angularem circa hunc axem recipere nequeat, quod fiet, si virga OA non solum ipsa fuerit inflexilis, sed etiam corpus traiciat ipsius tam firmiter infigatur, vt iunctura nullam inflexionem admittat: hanc enim conditionem absolute necessariam esse, vt more consueto per centrum oscillationis motus recte definiatur ex sequentibus clarius elucebit. Repraesentet ergo planum chartae sectionem corporis verticalem per eius centrum grauitatis G factam atque ad axem horizontalem O normalem, ita vt axis normaliter plano chartae in O infixus concipi debeat. Hoc ergo corpus in statu aequilibrî erit situm, si recta OG in ista sectione ab axe O per centrum grauitatis G ducta fuerit verticalis puta Og, ita vt in figura centrum grauitatis G interuallo Gg, a suo aequilibrî situ distet. Notari hic vero oportet, punctum G non tam pro corporis ABCD, quam pro totius massae oscillantis ex corpore ac virga OA compositae centro grauitatis accipiendum esse.

§. 27. Cum igitur centrum grauitatis G interuallo Gg a suo aequilibrî loco sit remotum, ac totius corporis

poris motus fiat circa axem O , distantia cuiusque corporis elementi a suo situ aequilibrui erit cognita. Si ergo vocetur pondus corporis cum virga coniunctum $= P$, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per centrum gravitatis G ducti et axi O paralleli sit $= P \cdot b \cdot b$; atque longitudo penduli simplicis isochroni ponatur $= f$ cognoscetur vis ad hunc motum producendum requisita. Scilicet cum spatium Gg sit minimum, ita ut recta OG a situ verticali infinite parum discrepet, capiatur $GS = \frac{b \cdot b}{OG}$, et in S secundum directionem SS ipsi Gg parallelam applicetur vis $= \frac{P \cdot Gg}{f}$, quae ad hunc motum oscillatorium producendum requiretur. Quamquam enim ante corpus in statu aequilibrui positum sumus contemplati, hic vero corpus in figura extra statum aequilibrui repraesentetur; tamen vtrinque ratiocinium idem est; ob declinationem a situ aequilibrui infinite parvam, de qua tantum spatiolum Gg in computum ingreditur.

§. 28. Haec igitur vis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SS applicata, existente $GS = \frac{b \cdot b}{OG}$, eundem motum oscillatorium producere valet, quem vis corpus actu sollicitans nempe eius pondus, producit. Corpus autem actu sollicitatur a vi ponderi ipsius P aequali in directione verticali GP : ex quo vis P in directione GP aequiualebit vi $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SS . Quodsi ergo loco huius vis applicetur ipsi aequalis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ at in directione contraria SQ , haec vis cum vi P in directione GP coniuncta corpus in aequilibrio continebit. Cum autem corpus alium motum praeter angularem circa axem O recipere nequeat, in aequilibrio erit, si momenta harum duarum virium respectu axis O

se mutuo destruant. At est vis P in directione GP agentis momentum ad axem O relatum $= P \cdot OG \cdot \sin. OGP = P \cdot Gg$; et vis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SQ agentis momentum est $= \frac{P \cdot Gg}{f} OS$. Aequilibrium ergo aderit si fit $P \cdot Gg = \frac{P \cdot Gg \cdot OS}{f}$, hoc est si $f = OS = OG + \frac{b \cdot b}{OG}$. Erit ergo longitudo penduli simplicis isochroni $= OG + \frac{b \cdot b}{OG}$, ideoque aequalis distantiae puncti S , quod centrum oscillationis appellari solet ab axe O . Perinde autem est siue hoc punctum S in ipsum planum $OCGD$ cadat, siue extra illud, eius enim distantia sola ab axe, quae semper est $= OG + \frac{b \cdot b}{OG}$ in computum ingreditur.

§. 29. Si iam hanc methodum simili modo ad corpora flexibilia adhibere velimus, ingentem statim difficultatem offendemus in situ corporis, quem inter oscillandum extra statum aequilibrui obtinet. Cum enim eiusmodi corpus non solum circa axem fixum O , de quo suspenditur, moveri queat, verum etiam circa quamvis flexuram; innumerabilibus modis huiusmodi corpus de statu aequilibrui deturbari poterit; qui cum initio omnes in corpore aequae produci queant, motus oscillatorii inde provenientes inter se maxime erunt diuersi. Summa autem anomalia huiusmodi motuum oscillatoriorum in hoc consistet, quod non singulae corporis partes simul in situm aequilibrui appellant: prouti in casu praecedente vñ venit. Quando autem non omnes corporis partes simul ad statum quietis pertingunt, tum etsi motus reciproci fiunt, tamen oscillationes distincte percipi non poterunt, et hancobrem methodum praecedentem ex assumpta penduli simplicis isochroni longitudine petitam in vñum voca-

re non licebit. Neque vero principia mechanica adhuc satis sunt euoluta, vt ex iis motus istiusmodi irregulares, qui prodeunt, si corporis partes vtcunque ex situ aequilibrui remouentur, ad calculum reuocari atque accurate definiri queant: eiusmodi ergo motibus explicandis superfedere debemus.

§. 30. Quantumuis autem hae oscillationes initio sint confusae et irregulares, tamen eae mox, docente experientia, ita se ad vniuersitatem componunt, vt omnes partes simul ad statum aequilibrui pertingant, atque oscillationes, si quidem sint minimae, cum oscillationibus penduli simplicis comparari queant. Quamobrem corporum flexibilium oscillantium eas tantum oscillationes hic inuestigabimus, quae sint regulares, et in quibus omnes partes ad statum aequilibrui simul accedunt, simulque ab eo recedunt. In hoc igitur negotio, antequam longitudo penduli simplicis isochroni definiri queat, inquirendum est, quantum singulae corporis partes a suo, quem in aequilibrio tenent, situ remoueri debeant, vt sibi relictæ simul ad statum aequilibrui perueniant. Scilicet cum corpus sit flexile, inuestigari oportet figuram, quam inter oscillandum induet, vt oscillationes fiant aequabiles; siue cum corpus infinitis modis de statu aequilibrui deturbari queat, in eos modos ante omnia est inquirendum, quibus singulae partes simul iterum ad aequilibrui statum appellant, eoque oscillationes aequabiles absoluunt. Inuenta autem eiusmodi idonea inflexione, quae oscillationes regulares producat, facile erit longitudinem penduli simplicis isochroni assignare.

§. 31. In hac inuestigatione, quemadmodum in resolutione plerorumque problematum fieri solet, ita verfabimur, vt statum corporis extra situm aequilibrii, quem quaerimus, tamquam cognitum spectemus, ac simul longitudinem penduli simplicis isochroni quasi cognitam assumamus. Tum igitur, quia cuiusvis partis motus, quo ad statum aequilibrii peruenit, est cognitus, vis ad motum oscillatorium producendum requisita determinari poterit. Inuentis autem viribus, quibus omnes corporis partes sollicitari oportet, vt simul atque illo ipso tempore, quod assumpta penduli simplicis isochroni longitudo postulat, ad statum aequilibrii appellant, efficiendum est, vt istae vires viribus, quibus corpus actu sollicitatur, aequivaleant. Loco illarum igitur virium corpori concipiantur applicatae aequales in directionibus contrariis, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debebunt. Quoniam igitur corpus est flexile primo eius inflexio est indaganda ab his viribus sese in aequilibrio tenentibus resultans, sicque status corporis extra aequilibrii situm determinabitur, tum vero simul longitudo penduli simplicis isochroni innotescet.

§. 32. Quo autem corpus flexile a potentiis quibuscunque sollicitatum in aequilibrio versetur, necesse est, vt in quavis flexura momenta potentiarum se mutuo destruant. In casu igitur proposito momenta virium sollicitantium respectu cuiusvis flexurae corporis inuestigari debebunt, quae cum se mutuo destruant, orientur tot aequationes, quot corpus habet flexuras, ex quibus inflexio corporis, quam in singulis flexuris patietur, definietur. Tum vero etiam, si corpus fuerit mobile circa axem fixum,

xum, ipse hic axis flexurae vicem sustinet, eiusque adeo respectu omnium potentiarum sollicitantium momenta se destruere debent, ex qua aequatione longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur. Poterit itaque haec methodus adhiberi ad oscillationes regulares corporum flexibilium quorumcunque determinandas, siue corpus aliquot tantum habeat flexuras, siue infinitas quemadmodum euenit in fune seu catena perfecte flexili. Casum autem hunc posteriorem iam alibi fusius sum persequutus, quare hic potissimum casum priorem, ubi numerus flexurarum est finitus, euoluam; quippe in quo consistit quaestio initio memorata, quam Celeb. Bernoullius mihi resolvendam proposuit; et quae eiusmodi implicatur difficultatibus, quae in altero casu non deprehenduntur.

§. 33. Sit igitur ex axe horizontali O , quem ad planum *Fig. 7.* chartae normalem concipi oportet, ita ut charta planum verticale repraesentet, suspensa virga rigida OA , quam tum inertiae tum etiam grauitatis expertem assumamus: hincque virgae in A alligatum sit corpus $ACBD$ ita, ut non solum corpus cum virga circa axem O , sed etiam ipsum corpus circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Corporis igitur ita suspensi status aequilibrum erit, dum centrum grauitatis eius G in recta verticali Ob , hoc est in puncto g versatur, atque in hoc situ aequilibrum etiam punctum A in eadem recta verticali Ob putatum in puncto a situm erit; alioquin enim corpus, quia flexile est, circa punctum A in aequilibrio persistere non posset. Cognito iam statu aequilibrum, manifestum est corpus ex eo cum rotando circa O tum circa A declinari posse.

posse. Ponamus ergo corpus ex statu aequilibræ ita deturbari, ut circa axem O per angulum $A O \alpha$, simul vero circa flexuram A per angulum $B A \beta$ inclinetur: flexuram enim in A ita concipimus, ut corpus circa eam tanquam circa axem horizontalem axi O parallelum gyriari queat. Hoc igitur situ punctum A a statu quietis elongatur intervallo $A a$, centrum gravitatis autem G intervallo Gg , quod componitur ex binis partibus $G \gamma$ et γg , quarum illa a motu circa flexuram A , hæc vero a motu circa axem O resultat: utramque autem elongationem a situ naturali infinite parvam assumimus.

§. 34. Ponamus iam corpus sibi relictum ex hoc statu ita ad lineam verticalem $O b$ accedere, ut singulae eius partes simul ad eum situm, quem in statu aequilibræ obtinent, perveniant, quod cum euenerit, motu concepto similiter in alteram regionem corpus excurret, atque oscillationes aequabiles absoluet, sit ergo longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Dum igitur punctum A in a pervenit percurrento spatium $A a$, centrum gravitatis corporis G in g pertinget, et conficiet spatium Gg quae spatia etsi sunt curvilinea, tamen instar linearum rectarum considerari possunt. Corpus ergo $A C B D$ perinde in statum aequilibræ perveniet, ac si motu angulari ferretur circa axem horizontalem fixum axi O parallelum in puncto V existentem, quod punctum determinatur intersectione rectae $G A$ productae cum verticali $O b$; tali enim motu puncto A percurrentum est spatium $A a$, centro gravitatis G autem spatium Gg ; prorsus uti simultanea appulsio corporis ad statum aequilibræ postulat. Spatiola igitur a singulis corporis elementis percurrenta sunt

sunt distantis ab axe isto imaginario per V ducto proportionalia: Hincque vis ad corpus mouendum requisita ex principiis ante datis determinari poterit.

§. 35. Sit igitur corporis ACBD pondus simulque massa $= P$, atque per eius centrum grauitatis G traici concipiatur axis horizontalis ad planum chartae normalis qui proinde cum axi O tum axi imaginario in V erit parallelus; huius respectu axis quaeratur momentum inertiae corporis quod fit $= P b b$, atque in recta VAG producta capiatur $GS = \frac{b b}{V G}$. Tum in S normaliter applicata concipiatur vis $= \frac{P \cdot G g}{f}$ secundum directionem Ss, erit haec illa ipsa vis ad motum propositum producendum requisita; quae ergo aequiualens esse debet vi grauitatis, qua corpus actu sollicitatur. At directio vis grauitatis est recta verticalis GP per corporis centrum grauitatis G ducta, eiusque quantitas aequatur ipsi corporis ponderi $= P$. Hancobrem necesse est vt vis $\frac{P \cdot G g}{f}$ in directione Ss applicata aequiualeat vi P in directione GP applicata. Quodsi ergo illa vis animo in sui contrariam mutari, eiusque loco in directione SQ applicari concipiatur vis $= \frac{P \cdot G g}{f}$, haec vis cum vi grauitatis P corpus in aequilibrio ita conseruare debebit, vt neque circa axem O neque circa flexuram in A quicquam inflectatur: ex quo harum duarum virium momenta tam respectu axis O quam respectu flexurae in A se mutuo destruant, necesse est.

§. 36. Consideremus primo flexuram in A, eritque vis P in directione GP agentis momentum ad hanc flexuram relatum $= P \cdot AG \cdot \sin. AGP = PAG \cdot \sin. G V g =$
P.

$\frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG}$; vis autem $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SQ vrgentis momentum ad eandem flexuram relatum est $= \frac{P \cdot Gg}{f}$. $AS = \frac{P \cdot Gg}{f} (AG + \frac{bb}{VG})$, quae duo momenta vti sunt contraria, ita etiam aequalia esse debent, erit ergo $\frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG} = \frac{P \cdot Gg}{f} (AG + \frac{bb}{VG})$ seu $AG \cdot f = AG \cdot VG + bb$. Deinde respectu axis fixi in O momentum ex vi P ortum est $= P \cdot Gg$, at momentum ex vi $\frac{P \cdot Gg}{f}$ resultans erit $= \frac{P \cdot Gg}{f} \cdot OAS = \frac{P \cdot Gg}{f} (OA + AG + \frac{bb}{VG})$, ob angulos enim ad O et A infinite paruos directio SQ quoque ad OA productam normalis est censenda. Ex horum ergo momentorum aequalitate sequitur $VG \cdot f = OA \cdot VG + AG \cdot VG + bb$. Duae igitur habentur aequationes, quarum altera determinabit rationem inter vtrumque motum rotatorium tam circa O quam circa A faciendum, vt corpus ad oscillationes aequabiles peragendas accommodetur, hocque fiet determinatione puncti V , altera vero aequatio inseruiet longitudini penduli simplicis isochroni f inueniendae.

§. 37. Si prior aequatio a posteriori subtrahatur, excedet ratio momenti inertiae corporis seu quantitas bb ex calculo eritque $f(VG - AG) = OA \cdot VG$, seu $f = \frac{OA \cdot VG}{VG - AG} = OA + \frac{AG}{VG - AG} \cdot OA$. Quodsi ergo ex puncto G ducatur rectae OA parallela, donec verticali Ob productae occurrat, exhibebit haec longitudinem penduli simplicis isochroni f . Ceterum ex hac aequatione prodit $VA = \frac{OA \cdot AG}{f - OA}$; prima autem aequatio praebet $VG = \frac{AG \cdot f - bb}{AG} = VA + AG$, ita vt fit $VA = f - AG - \frac{bb}{AG}$ vnde

unde eliminanda VA, habebitur $ff = \frac{(OA \cdot AG + AG^2 + bb)f - OA \cdot bb}{AG}$

Ad hanc facilius resoluendam ponamus $OA = a$;

$AG = b$; eritque $ff = \frac{2(ab + bb + \frac{bb^2}{b})f - 2abb}{2b}$ et $f = \frac{ab + bb + \frac{bb^2}{b} \pm \sqrt{((ab + \frac{bb^2}{b})^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}}{2b}$. Dupli-

cem igitur valorem pro pendulo f inuenimus, quod indicat duplici modo corpus ita de statu aequilibrii remoueri posse, vt oscillationes regulares efficiat.

Erit autem pro hoc duplici valore distantia VA $\frac{ab - bb - \frac{bb^2}{b} \pm \sqrt{((ab + \frac{bb^2}{b})^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}}{2b}$

unde reperitur $OV = OA - AV = \frac{ab + bb + \frac{bb^2}{b} \pm \sqrt{((ab + \frac{bb^2}{b})^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}}{2b}$. Ex qui-

bus colligitur fore $f + OV = a + b + \frac{bb}{b}$ et $f - OV = \frac{ab + \frac{bb^2}{b} \pm \sqrt{((ab + \frac{bb^2}{b})^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}}{b}$.

§. 38. Commoda hinc deducitur constructio, ex Fig. 8 qua cum corporis duplex motus oscillatorius, tum pro utroque pendulum simplex isochronum definiatur. Consideretur corpus ACBD in statu quietis, ita vt virga OA et recta AGB situm verticalem teneant, eritque $OA = a$, et $AG = b$; super OG tanquam diametro describatur semicirculus OFG, et per A ducatur recta AF normalis ad OG erit $AF = \sqrt{ab}$. Iam existente momento inertiae corporis, vt ante $= Pbb$ sumatur $GR = \frac{bb}{b}$ ita vt R futurum sit corporis centrum oscillationis, si ex puncto A suspenderetur, ac bisariam fecerur recta OR in puncto E, erit $OE = RE = \frac{a+b}{2} + \frac{bb}{2b} = \frac{ab + bb + \frac{bb^2}{b}}{2b}$, et $AE = \frac{ab - bb - \frac{bb^2}{b}}{2b}$ tum ducatur recta EF erit $EF = \frac{\sqrt{((ab + \frac{bb^2}{b})^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}}{2b}$

Tom. XIII. V

$= \frac{\sqrt{(ab+bb)^2 - 2(ab-bb)bb + b^4}}{2b}$. Quod si ergo centro E radio EF ducatur circulus VFv, eius intersectiones V et v, binos valores rectae OV, in praecedente figura exhibebit; simul vero hinc longitudo penduli simplicis isochroni f, definitur. Scilicet si corpus vel circa V vel v de statu quietis deturbatur utroque casu oscillationes regulares conficiet, ac priori casu longitudo penduli simplicis isochroni erit $f = OV$, posteriori casu erit $f = OV$.

§. 39. Sit corpus virga recta AB ex materia uniformi facta, erit eius centrum grauitatis in puncto medio G, ita vt longitudo virgae futura sit $AB = 2b$, tum autem erit $bb = \frac{1}{2}bb$; ideoque $f = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$ et $OV = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$. Ex his manifestum est, si longitudo virgae AB fuerit valde exigua respectu longitudinis $OA = a$, fore vel $f = a + b + \frac{bb}{3a}$ et $OV = \frac{1}{2}b + \frac{bb}{3a}$, vel in altero casu $f = \frac{1}{2}b + \frac{bb}{3a}$ et $OV = a + b + \frac{bb}{3a}$; priori ergo casu corpus circa O quasi corpus rigidum oscillabitur, posteriori vero circa suum centrum oscillationis, quod habet respectu axis O, quae adeo oscillationes celerrime absoluentur. Sit autem $AB = \frac{1}{2}OA$, seu $b = \frac{1}{2}a$, erit vel $f = \frac{1}{2}a$ et $OV = \frac{1}{2}a$; vel $f = \frac{1}{2}a$ et $OV = \frac{1}{2}a$. Priori igitur casu virga AB inter oscillandum eum situm tenebit, quem figura indicat, rotabitur scilicet circa punctum V, existente $OV = \frac{1}{2}Oa$, eritque penduli simplicis isochroni longitudo $= OF = 2Oa$. Posteriori casu virga AB inter oscillandum eum tenebit situm, quem figura 10 indicat, gyrabitur nimirum circa pun-

punctum V existente $OV = \frac{1}{2} Oa$ et longitudo penduli simplicis isochroni erit $OF = \frac{1}{2} Oa$. Quod si autem virga AB cum filo Oa tanquam corpus rigidum oscilletur foret longitudo penduli simplicis isochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = \frac{181}{91} Oa$ quae vna parte $\frac{1}{91}$ minor est quam casu priori.

§. 40. Sit corpus ACBD globus ex materia vni- Fig. 7.
formi confectus, qui in puncto A virgae seu filo rigido
gratuitatis experti OA ita sit alligatus vt circa flexuram
in A rotari possit. Erit ergo centrum grauitatis G in
centro globi, et globi radius $AG = b$; porro autem
momentum inertiae globi ita est comparatum, vt sit
 $bb = \frac{1}{2} bb$. Erit itaque $f + OV = a + b + \frac{bb}{b}$
 $= a + \frac{7}{2} b$ et $f - OV = \frac{1}{2} V (aa + \frac{1}{2} ab + \frac{19}{10} bb)$
ergo $f = \frac{1}{2} a + \frac{7}{10} b + \frac{1}{10} V (25 aa + 30 ab + 49 bb)$
et $OV = \frac{1}{2} a + \frac{7}{10} b + \frac{1}{10} V (125 aa + 30 ab + 49 bb)$
Sin autem globus filo OA firmiter esset affixus, vt in A
nulla inflexio fieri queat, tum foret longitudo penduli
simplicis isochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = a + b + \frac{2bb}{5(a+b)}$;
atque si radius globi b respectu a fuerit valde paruus,
erit istud pendulum $= a + b + \frac{2bb}{5a} - \frac{1}{5} \frac{b^3}{aa}$. Casu au-
tem quo flexura in A existit erit longitudo penduli pro
superiori signo $f = a + b + \frac{2bb}{5a} - \frac{1}{25} \frac{b^3}{aa}$; at pro inferi-
ori erit $f = \frac{1}{2} b - \frac{2bb}{5a} + \frac{1}{25} \frac{b^3}{aa}$; atque hoc posteriori ca-
su circa punctum in ipso globo sumtum gyrabitur. Priori
autem casu oscillationes fere congruunt cum iis, quae
fierent, si in A nulla esset flexura; lentiores tamen e-
runt paulisper, quoniam pendulum isochronum longius
est parte $\frac{1}{25} \frac{b^3}{aa}$, quod discrimen in experimentis capien-

dis probe notari debet. Ceterum etsi filum OA est flexile, dummodo fit tenuissimum, inter oscillandum in directum manebit extensum.

Fig. 11.

§. 41 Quo hoc clarius pateat substituamus loco filii rigidi OV , cui corpus est alligatum, funem seu catenam OA perfecte flexilem, simulque naturaliter grauem. Manifestum ergo est hunc funem inter oscillandum incurvatum iri, cuius proinde curvatura ante inuestigari debet, quam motum oscillatorium definire liceat. Sit igitur OMA illa curua quam funis inter oscillandum format, atque corpus AB gyretur circa punctum V . Ponatur corporis AB pondus $= P$, eiusque momentum respectu axis horizontalis per centrum gravitatis G ducti atque axi O paralleli $= Pbh$. Quod si iam capiatur $GS = \frac{bh}{VG}$, vis requisita ad motum oscillatorium in corpore AB generandum erit $= \frac{P \cdot Gg}{f}$, applicanda in puncto S normaliter ad AB scilicet in directione Ss . At ob rationes supra allegatas hanc eandem vim in directione contraria SQ applicatam concipiamus. Deinde quaecumque funis particula x , cuius massa sit $= dp$ percurrere debet spatium xt tempore longitudini penduli simplicis f conformi, ideoque necesse est, ut in directione xt virgeatur vi $= \frac{x \cdot dp}{f}$; hanc vero pariter in directione contraria xz applicatam ponemus; ut omnes istae vires cum viribus corpus et funem actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debeant.

§. 42. Incipiamus a flexura A in quam agunt vis gravitatis corporis P in directione GP et vis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SQ , illius momentum est $= \frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG}$, huius vero momentum est $= \frac{P \cdot Gg}{f} AS = \frac{P \cdot Gg}{f} (AG + \frac{bh}{VG})$ unde erit

erit $AG \cdot f = AG \cdot VG + bb$. Cum iam funis in singulis punctis sit flexilis, consideremus eius punctum quodcunque M , in quod non solum vires corpus AB sollicitantes agunt, sed etiam vires, quibus singula elementa portionis funis MA vrgentur. A vi quidem P in directione GP oritur momentum respectu flexurae in $M = P (Gg - Mm)$; a vi autem $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SQ oritur momentum in contrariam plagam tendens $= \frac{P \cdot Gg}{f} (MA + AG + \frac{bb}{VG})$. Consideretur iam funis elementum quoduis $x = dp$, a cuius pondusculo nascitur momentum pro $M = dp (tx - Mm) = xy \cdot dp$; quarum omnium per MA summa est $= \int tx \cdot dp - Mm \cdot \int dp$. Ex vi autem $xz = \frac{x \cdot t \cdot dp}{f}$, oritur momentum $= \frac{x \cdot t \cdot M \cdot dp}{f} = \frac{x \cdot t \cdot dp}{f} (AM - Ax)$ quorum omnium summa est $= \frac{AM}{f} \int xt \cdot dp - \frac{1}{f} \int xt \cdot at \cdot dp$ quae integralia ab A vsque ad M sumi debent. Quia igitur omnia momenta pro flexura M orta se destruiere debent erit $P (Gg - Mm) + \int tx \cdot dp - Mm \cdot \int dp = \frac{P \cdot Gg}{f} (MA + AG + \frac{bb}{VG}) + \frac{AM}{f} \int xt \cdot dp - \frac{1}{f} \int xt \cdot at \cdot dp$, sumimus autem hic promiscue *am* loco curvae AM , quia aberratio a linea recta est infinite parua.

§. 43. Cum autem ex flexura in A sit $\frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG}$ $= P (Gg - Aa) = \frac{P \cdot Gg}{f} (AG + \frac{bb}{VG})$ erit pro flexura in M , $P (Aa - Mm) + \int tx \cdot dp - Mm \cdot \int dp = \frac{P \cdot MA \cdot Gg}{f} + \frac{AM}{f} \int xt \cdot dp - \frac{1}{f} \int xt \cdot at \cdot dp$. Ponamus iam $am = x$; $Mm = y$, pondus funis $MA = p$; $Oa = a$, $Aa = c$; erit $AM = am = x$; $\int dp = p$; $\int xt \cdot dp = \int y \cdot dp$; et $\int xt \cdot at \cdot dp = \int xy \cdot dp$. Ponatur porro $VA =$

$= \sqrt{a} = k$, et $AG = b$; erit $VG = b + k$ et $Gg = \frac{c(b+k)}{k}$; eritque primo pro flexura in A; $bf = bb + bk + bb$; atque pro flexura M erit $Pc = Py + \int y dp - y p = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \frac{x}{f} \int y dp - \frac{1}{f} \int x y dp$; seu $P(c-y) - \int p dy = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \int \frac{dx}{f} \int y dp$, vbi notandum est, si $x = 0$ fieri $y = c$ et si $x = a$, fit $y = 0$. Sumantur autem differentialia vt prodeat $-P dy - p dy = \frac{Pcdx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f} \int y dp$. Sumtisque denuo differentialibus posito dx constante habebimus: $-P ddy - p ddy - dy dp = \frac{y dx dp}{f}$; quae est aequatio pro curuatura funis. O M A.

§. 44. Si funis grauitas euanescat, vel corpus P fit quasi infinitum respectu ponderis funis p , tum fiet $ddy = 0$, funique in directum extendetur, ita vt fit $y = \frac{c(a-x)}{a}$, vti supra notauimus. Sin autem funis ad corpus finitam habeat rationem, ponamus finem vniformis crassitie, vt sit p ipsi x proportionale, fitque $p = nx$ atque habebimus $0 = Pddy + nx ddy + n dx dy + \frac{ny dx^2}{f} = 0$. Sumatur pro aequatione integrali $y = c + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{etc.}$ erit $\left. \begin{aligned} 2\beta P + 6\gamma Px + 12\delta Px^2 + 20\epsilon Px^3 + 30\zeta Px^4 + 42\eta Px^5 \text{ etc.} \\ + 2\beta nx + 6\gamma nxx + 12\delta nx^3 + 20\epsilon nx^4 + 30\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \alpha n + 2\beta nx + 3\gamma nx^2 + 4\delta nx^3 + 5\epsilon nx^4 + 6\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \frac{nc}{f} + \frac{\alpha n x}{f} + \frac{\beta n x^2}{f} + \frac{\gamma n x^3}{f} + \frac{\delta n x^4}{f} + \frac{\epsilon n x^5}{f} \text{ etc.} \end{aligned} \right\} = 0$ hinc ergo erit $2\beta P = -\alpha n - \frac{nc}{f}$; $6\gamma P = -4\beta n - \frac{\alpha n}{f}$; $12\delta P = -9\gamma n - \frac{\beta n}{f}$; $20\epsilon P = -16\delta n - \frac{\gamma n}{f}$ etc. At ex aequatione $-P dy - p dy = \frac{Pcdx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f} \int y dx$ intelligitur, sin $x = 0$, fore ob $p = 0$ et $\int y dx = 0$; $dy = -$
 cdx

$\frac{cdx(b+k)}{fk} = a dx$; ita vt fit $a = \frac{c(b+k)}{fk}$; hinc erit $\beta = \frac{bcn}{2Pfk}$; $\gamma = -\frac{bcn}{3Pfk} + \frac{nc(b+k)}{6Pfk}$, etc. Inuentis coefficientibus ponatur $x=a$, et $y=0$, habebiturque aequatio inuoluens incognitas f et k , quae cum aequatione $bf = bb + bk + kb$ coniuncta vtramque determinabit.

§. 45. Sit pondus corporis P valde magnum, vt termini, in quorum denominatoribus P plures vna habet dimensiones reici queant, eritque $y = c - \frac{cx(b+k)}{fk} + \frac{nbcx}{2Pfk} + \frac{ncx^2(b+k)}{6Pfk}$; ponatur $x=a$, vt fiat $y=0$ erit $1 - \frac{a(b+k)}{fk} + \frac{naab}{2Pfk} + \frac{na^2(b+k)}{6Pfk} = 0$. Sit finis pondus $na = F$ erit $6Pfk - 6Paf(b+k) + 3Fabf + Fa^2(b+k) = 0$; vnde ob P valde magnum $f = \frac{a(b+k)}{k} + \frac{Fa(b+k)}{6Pk} = b+k + \frac{bh}{b}$ ex qua aequatione k indeque f definientur. Cum autem in puncto A fit $\frac{cdx}{dy} = \frac{fk}{b+k}$, erit ob $Aa=c$ subtangens curuae in $A = \frac{fk}{b+k}$; ex subtangente ergo curuae in A cognita cum aequatione $f = b+k + \frac{bh}{b}$ innotescunt f et k . Si corpus appensum P penitus euanescat prodibunt oscillationes funis suspensi perfecte flexilis, quae eaedem deprehendentur, quas iam ante aliquot annos in Comment. Acad. Petropolitanae Cel. Bernoulli et ego inuenimus.

§. 46. Quemadmodum filum OA primum inertiae et grauitatis expers deinde graue quidem at perfecte flexile posuimus, ita nunc loco OA substituamus corpus quodcunque graue et rigidum, quod circa O liberrime rotari queat, in A autem aliud corpus pariter rigidum et graue AB ita habeat connexum, vt id quoque circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Sit corporis O Fig. 12.

A centrum grauitatis in E, corporis AB autem in F eritque vtrumque corpus in aequilibrio, si centra grauitatis E et F fuerint in recta verticali Ob in punctis e et f sita. Habeat hoc corpus inter oscillandum situm quem figura repraesentat, ita vt corpus OA circa axem O per angulum AOa, corpus autem AB circa axem imaginarium L per angulum BLb a statu aequilibrui sit remotum: e quo situ vi grauitatis ita descendat, vt corpus OA circa axem O, corpus vero AB circa L rotando simul ad situm aequilibrui perueniant; sitque longitudo penduli simplicis isochroni = f. Ponatur corporis OA pondus, quo in directione verticali El vrgetur = P, corporis vero AB pondus, quo in directione verticali Fm sollicitatur, = Q; atque exprimente P et Q simul massas horum corporum.

§. 47. Per vtriusque corporis centrum grauitatis transire concipiatur axis horizontalis axi O parallelus, atque sit corporis OA momentum inertiae respectu axis E = Pbb; corporis autem AB momentum inertiae respectu axis F sit = Qll. Quia iam corpus OA circa axem O rotatur, eiusque centrum grauitatis E interuallo Ee a statu aequilibrui distat, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita = $\frac{P \cdot Ee}{f}$, quae normaliter ad BA in directione Rr est applicanda existente ER = $\frac{bb}{OE}$; hanc vero vim $\frac{P \cdot Ee}{f}$ in directione opposita Rg applicatam concipiemus. Simili modo cum corporis AB centrum grauitatis F distet a suo aequilibrui situ f interuallo Ff, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita = $\frac{Q \cdot Ff}{f}$, et quoniam hoc corpus circa axem imaginarium L oscillando rotatur, vis ista

ista in puncto S secundum directionem ad AB normalem Ss est applicanda, sumto intervallo $FS = \frac{ii}{LF}$, hanc ergo vim in directione opposita Sσ applicatam concipiemus. Hic quantitates incognitae ergo sunt longitudo penduli simplicis isochroni f et positio puncti L.

§. 48. Vires igitur quibus corpus hoc oscillans in aequilibrio conservari debet sunt primo pondera P et Q in directionibus El et Fm sollicitantia; deinde vires $\frac{P \cdot Ee}{f}$ et $\frac{Q \cdot Ff}{f}$ in directionibus Rg et Sσ vrgentes. Momenta ergo harum virium cum respectu flexurae A tum respectu axis O se inuicem destruere debebunt. In flexuram A autem agunt vires Fm et Sσ, quarum momenta sunt $Q(Ff - Aa)$ et $\frac{Q \cdot Ff}{f}$. $AS = \frac{Q \cdot Ff}{f} (AF + \frac{ii}{LF})$, eritque ideo $f(Ff - Aa) = Ff(AF + \frac{ii}{LF})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ erit $f \cdot AF = AF \cdot LF + ii$. In axem O autem agunt omnes vires Fm, El; Sσ et Rg: eritque momentum vis Fm = $Q \cdot Ff$; vis El = $P \cdot Ee$; vis Sσ = $\frac{Q \cdot Ff}{f} (OA + AS) = \frac{Q \cdot Ff}{f} (OA + AF + \frac{ii}{LF})$; vis Rg = $\frac{P \cdot Ee}{f} OR = \frac{P \cdot Ee}{f} (OE + \frac{bb}{OE})$. Ex his ergo nascetur aequatio $Q \cdot Ff + P \cdot Ee = \frac{Q \cdot Ff}{f} (OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P \cdot Ee}{f} (OE + \frac{bb}{OE})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ et $Aa : Ee = OA : OE$ erit componendo $Ff : Ee = OA \cdot LF : OE \cdot LA$: eritque ideo $Q \cdot OA \cdot LF \cdot f + P \cdot OE \cdot LA \cdot f = Q \cdot OA^2 \cdot LF + Q \cdot OA \cdot AF \cdot LF + Q \cdot OA \cdot ii + P \cdot OE^2 \cdot LA + P \cdot LA \cdot bb$.

§. 49. Ponamus $OA = a$; $OE = \alpha$; $AB = b$; $AF = \beta$; et $OL = x$ erit ob angulos ad O et L minimos, $AL = a - x$; $LF = a + \beta - x$; qui valores in

Tom. XIII.

X

pri-

prima aequatione substituti dant $\beta f = a\beta + \beta^2 - \beta x + ii$ in altera vero $Qa^2f + Qa\beta f - Qafx + Pa\alpha f - Pa\beta f - Qa^2x + Qa\beta^2 - Qa\beta x + Qa^2ii + Pa\alpha^2 - Pa^2x + Pabb - Pbbx$. Ex priori aequatione habetur $f = a + \beta - x + \frac{ii}{\beta}$; qui valor in posteriori substitutus dat $Pa\alpha x + Qa\alpha x + Pa^2x - 2Pa\alpha x - Pa\beta x - \frac{Pa\alpha x}{\beta} + Pbbx - Qa^2x - Qa\beta x - \frac{Qa\alpha x}{\beta} + Pa^2\alpha - Pa\alpha^2 + Pa\alpha\beta + \frac{Pa\alpha ii}{\beta} - Pabb + \frac{Qa^2ii}{\beta} = 0$. Quae aequatio, cum duas radices contineat, indicat corpus duplici modo ad oscillationes aequabiles absoluendas impelli posse; hincque vterque modus non solum cognoscitur, sed etiam pro vtroque longitudo penduli simplicis isochroni reperitur. Si ponatur $P = 0$, tum prodibit casus ante pertractatus, vbi virgam OA inertiae ac gravitatis expertem assumimus; sin autem sit $Q = 0$, ita ut corpus inferius AB vel evanescat vel suam inertiam simulque gravitatem amittat, fiet vel $x = a$ vel $x = a - \alpha + \beta + \frac{ii}{\beta} - \frac{bb}{\alpha}$, priori casu nullus fit motus circa axem O, posteriori vero exhibetur motus oscillatorius ordinarius, fitque longitudo penduli simplicis isochroni $f = a + \frac{bb}{\alpha}$.

Fig. 13. §. 50. Simili modo intelligitur, quemadmodum ratiocinium fit instituendum, si plura corpora rigida ita sint connexa, ut circa quamque flexuram motus existere possit. Ponamus ergo tria corpora OA, AB, et BC hoc modo esse connexa, quorum supremum OA circa axem horizontalem O immediate mobile sit, seu quod eodem redit habeat corpus OABC duas flexuras in A et B, circa quas eius partes inferiores sint mobiles. Repraesentet

ter figura eum situm, ex quo corporis singulae partes ad statum aequilibrui simul perueniant, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Suprema quidem pars OA aliter nisi circa axem O moueri nequit; at partem secundam AB gyrari ponamus circa axem horizontalem imaginarium in L: eruntque distantiae OL, OM cum longitudo penduli simplicis isochroni f tres quantitates incognitae per aequationes determinandae. Ponamus porro partis OA pondus $= P$ eiusque centrum grauitatis in E: partis AB pondus sit $= Q$, eiusque centrum grauitatis in F, partis autem BC pondus sit $= R$, eiusque centrum grauitatis in G: ducantur verticales EL, Fm, Gn quae exprimant sollicitationes ab his ponderibus ortas.

§. 51. Per singularum harum partium centra grauitatis transire concipiantur axes horizontales axi in O paralleli: eorumque respectu quaerantur momenta inertiae: sit igitur partis OA momentum inertiae respectu axis $F = Qii$, et partis BC momentum inertiae respectu axis $E = Pbh$; AB momentum inertiae respectu $G = Rkk$. His cognitis capiantur $ER = \frac{bb}{OE}$; $FS = \frac{ii}{LF}$; $GT = \frac{kk}{MG}$; erunt puncta R, S, T illa loca, vbi applicatae concipi debent vires $R\varrho$; $S\sigma$; $T\tau$, quae ex acceleratione corporis oriuntur. Cum autem centrum grauitatis E interuallo Ee distet a statu aequilibrui, centrum grauitatis G interuallo Gg , erit vis $R\varrho = \frac{P \cdot Ee}{f}$; vis $S\sigma = \frac{Q \cdot Ff}{f}$ et vis $T\tau = \frac{R \cdot Gg}{f}$. Ista igitur tres vires effectum trium praecedentium virium EL, Fm, et Gn destruere, atque corpus in aequilibrio conseruare debent; Hinc momenta quae ex illis viribus pro flexuris B, A et O nascuntur aequalia esse debent momentis quae ex istis viribus resultant.

X 2

§. 52.

§. 52. Ex viribus autem El , Fm , et Gn sequentia emergunt momenta: Scilicet pro flexura B est momentum $= R(Gg - Bb) = \frac{R \cdot Gg \cdot BG}{MG}$, pro flexura A est momentum $= R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa)$; et pro ipso axe O est momentum $= R \cdot Gg + Q \cdot Ff + P \cdot Ee$. At ex viribus Rg , $S\sigma$, et $T\tau$ oriuntur momenta in partem contrariam vergentia; erit autem pro flexura B momentum $= \frac{R \cdot Gg}{f} (Bg + \frac{kk}{MG})$; pro flexura A momentum est $= \frac{R \cdot Gg}{f} (AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q \cdot Ff}{f} (AF + \frac{ii}{LF})$ denique pro axe ipso O est momentum $= \frac{R \cdot Gg}{f} (OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q \cdot Ff}{f} (OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P \cdot Ee}{f} (OE + \frac{bb}{OE})$. Hinc igitur orientur tres sequentes aequationes

$$\begin{aligned} R(Gg - Bb) &= \frac{R \cdot Gg}{f} (BG + \frac{kk}{MG}) \\ R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa) &= \frac{R \cdot Gg}{f} (AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q \cdot Ff}{f} (AF + \frac{ii}{LF}) \\ R \cdot Gg + Q \cdot Ff + P \cdot Ee &= \frac{R \cdot Gg}{f} (OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q \cdot Ff}{f} (OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P \cdot Ee}{f} (OE + \frac{bb}{OE}) \end{aligned}$$

Ex quibus tribus aequationibus primum puncta L et M ac deinceps longitudo penduli simplicis isochroni f determinabitur.

§. 53. Prima aequatio ob $Gg : Bb = MG : MB$ abit in hanc $BG \cdot f = BG \cdot MG + kk$: Atque si a secunda prima auferatur remanebit ista $R(Bb - Aa) + Q(Ff - Aa) = \frac{R \cdot AB \cdot Gg}{f} + \frac{Q \cdot Ff}{f} (AF + \frac{ii}{LF})$. Est autem $Bb - Aa = \frac{AB \cdot Aa}{LA}$; $Ff - Aa = \frac{AF \cdot Aa}{LA}$; et $Ff = \frac{LF \cdot Aa}{LA}$; $Bb = \frac{LB \cdot Aa}{LA}$ atque $Gg = \frac{LB \cdot MG \cdot Aa}{LA \cdot MB}$, ex quibus haec secunda aequatio resultat, $R \cdot AB \cdot f + Q \cdot AF \cdot f = \frac{R \cdot AB \cdot LB \cdot MG}{MB} + Q \cdot AF \cdot LF + Q$.

+ Q.ii. Subtrahatur secunda aequatio a tertia ac remanebit :
 $R.Aa + Q.Aa + P.Ee = \frac{R.OA.Gg}{f} + \frac{Q.OA.Rf}{f} + \frac{P.Ee}{f} (OE + \frac{bb}{OE})$. Verum est $Aa = \frac{OA.Ee}{OE}$, $Ff = \frac{OA.LF.Ee}{OE.LA}$, et
 $Gg = \frac{OA.LB.MG.Ee}{OE.LA.MB}$, ex quibus nascitur sequens aequatio
 tertia ; $R.OA.f + Q.OA.f + P.OE.f = \frac{R.OA^2.LB.MG}{LA.MB}$
 $+ \frac{Q.OA^2.LF}{LA} + P.OE^2 + P.bb$. Habemus ergo tres
 aequationes inter quantitates finitas tam cognitae quam
 incognitae, quoniam eliminavimus quantitates infinite par-
 vas Ee , Aa , Ff , Bb , et Gg , ex quibus formari po-
 terit aequatio inter f et cognitae, quae erit trium dimen-
 sionum atque indicat, triplici modo corpus $OABC$ du-
 abus flexuris praeditum ad oscillationes aequabiles pera-
 gendas incitari posse.

§. 54. Quodsi corpus oscillans plures quam duas
 habeat flexuras, circa quae aequae ac circa axem O mo-
 tus rotatorius existere queat. Simili modo tam inflexio
 ad oscillationes aequabiles producendas necessaria, quam
 longitudo penduli simplicis isochroni definiri poterit. Ob-
 tinentur enim tot aequationes, quot sunt flexurae ipso
 axe O quoque pro flexura computato, ex quibus primo
 axes imaginarii, circa quae partes inferiores gyrauntur de-
 finiri poterunt, quorum numerus unitate minor est, quam
 numerus aequationum ; ita ut una aequatio superfit lon-
 gitudinem penduli simplicis isochroni exhibens. Haec
 autem aequatio eliminatis positionibus axium illorum ima-
 ginariorum ascendet ad tot dimensiones, quot fuerint fle-
 xurae axe O quoque pro una flexura computato, unde
 colligendum est, eiusmodi corpus tot variis modis ad os-
 cillationes uniformes absoluendas impelli posse, quot con-

tineat partes flexuris inter se iunctas. Pariter scilicet haec oscillationum ratio est comparata, acsi filo inertiae et grauitatis experti plura corpuscula fuerint alligata; quae etiam tot variis modis oscillationes vniformes peragere possunt, quot fuerit ponduscula. Neque vero iste casus ab eo, quem hic tractauimus, aliter discrepat, nisi quod hic corpora-flexuris inuicem connexa finitae magnitudinis assumimus, dum ea ibi infinite parua possumus: ex quo necesse est, vt ille casus in hoc comprehendatur: formulae autem atque aequationes hic inuentae ad hyppothesin corpusculorum infinitae paruorum accommodabuntur, si quantitates bb , ii , kk euanescant.

